Lineare Algebra I, Musterlösung

Aufgabe 1

Wir bringen die entsprechende erweiterte Matrix auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 5 & 8 & -13 \\ 4 & -8 & -16 & -23 & 27 \\ 3 & -10 & 0 & -5 & 26 \\ 1 & -6 & -7 & -10 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I.} + 2\cdot\mathrm{IV.} \\ \mathrm{II.} + 2\cdot\mathrm{I.} \\ \mathrm{III.} - 3\cdot\mathrm{IV.} \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & -9 & -12 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & 21 & 25 & -16 \\ 1 & -6 & -7 & -10 & 14 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -7 & -10 & 14 \\ 0 & -8 & -9 & -12 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 4\cdot\mathrm{I.} - 3\cdot\mathrm{II.} \\ \\ \\ \mathrm{IV.} + 2\cdot\mathrm{III.} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & -4 & 11 \\ 0 & -8 & -9 & -12 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 6\cdot\mathrm{I.} - \mathrm{III.} \\ 2\cdot\mathrm{II.} - 3\cdot\mathrm{III.} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 24 & 0 & 0 & -17 & 65 \\ 0 & -16 & 0 & -3 & 27 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I.} - 17\cdot\mathrm{IV.} \\ \mathrm{II.} + 3\cdot\mathrm{IV.} \\ \mathrm{III.} + 7\cdot\mathrm{IV.} \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 24 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Folglich ist die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$L_{hom} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und die Lösungsmenge des inhomogenen LGS

$$L_{inhom.} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2

(a)

$$\chi_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\cdot(\lambda^2+1) = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$= -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$$

(b) $\chi_f(\lambda) = 0 \iff -(\lambda-3)^2(\lambda-2) = 0$

$\iff \lambda = 3$ oder $\lambda = 2$

Also sind $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{alg. Vielfachheit } 2}}{\lambda_1 = 3}$ und $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{alg. Vielfachheit } 1.}}{\lambda_2 = 2}$ die Eigenwerte von f.

(c) Es gilt

$$E_f(2) = \ker(f - 2\cdot id) = \ker\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I.} + 3\cdot\mathrm{II.} \\ \\ \mathrm{III.} + 3\cdot\mathrm{II.} \end{array}\end{array}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_f(3) = \ker(f - 3\cdot id) = \ker\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mathrm{I.} - \mathrm{III.} \\ \mathrm{II.} - \mathrm{III.} \\ \mathrm{III.}\cdot 2 \end{array}\end{array}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(d) Da

(geom. Vielfachheit von $\lambda_1 = 3$) $= 1 < 2 =$ (alg. Vielfachheit von $\lambda_1 = 3$),

ist f nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3

(a) <u>B ist eine Basis von U</u>, da B die Standardbasis von $U = \mathbb{R}^3$ ist.

<u>B' ist eine Basis von U:</u> Da $\dim U = 3$, genügt es zu zeigen, dass B' (aufgefasst als 3×3 - Matrix) Rang 3 hat. Dazu bringen wir B' auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{I.-II.}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I. \leftrightarrow III.} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen sofort, dass Rang $= 3$.

<u>C ist eine Basis von V:</u> Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V, \quad \text{da } 1+0=1, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V, \quad \text{da } 0+1=1.$$

- C ist lin. unabh.: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$
- C erzeugt V: Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$. Dann ist $z = x+y$, also
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle C \rangle.$$

Folglich ist C eine Basis von V.

<u>C' ist eine Basis von V:</u> Bemerke wieder, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V, \quad \text{da } 1+(-1)=0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V, \quad \text{da } 0+2=2.$$

Da wir (s.o.) wissen, dass $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$, genügt es zu prüfen, dass C' lin. unabh. ist <u>oder</u> $\langle C' \rangle = V$.

- Variante 1: lin. unabh.: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$
- Variante 2: $\langle C' \rangle = \langle C \rangle = V$

  Wir sehen, dass
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
  Daraus folgt die Beh.

(b) Wir fassen B, B', C, C' als Matrizen auf und bezeichnen mit L_B bzw. $L_{C'}$ Linksinverse von B bzw. C'.
Dann gilt

$$ {}_{C'}M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_{C}M_B(f) \cdot L_B \cdot B' $$

[Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[rrr, "{}_{C}M_B(f)"] \arrow[dr, "B", "\cong"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "\cong", "C"'] \\
& U \arrow[r, "f"] & V & \\
\mathbb{R}^3 \arrow[rrr, "{}_{C'}M_{B'}(f)"'] \arrow[ur, "\cong", "B'"'] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "C'"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$
]

Da B die Einheitsmatrix ist, ist $L_B = E_3$. Wir müssen ein $L_{C'}$ berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow$ Wir können $L_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ wählen.

[Beachte: Linksinverse sind i. A. nicht eindeutig, es gibt hier verschiedene Wahlen; z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ auch ein Linksinverses].

Also folgt:

$$ {}_{C'}M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Aufgabe 4

Folgende Aussagen sind <u>wahr</u>:

1) ... $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) ... jede Faser von f aus genau einem Element besteht.

3) ... $\mathbb{Z}/_{10} \to \mathbb{Z}, \quad [x] \mapsto x$

4) ... immer mindestens eine Lösung.
... besitzt eine nicht-triviale Lösung, falls die Anzahl der Variablen größer als die Anzahl der Gleichungen ist.

5) ... er injektiv ist.
... seine Determinante $\det f \neq 0$ ist.

6) ... ein Erzeugendensystem.

7) ... $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8) ... Es folgt: A besitzt 0 als einzigen Eigenwert.

Alle anderen Antworten sind falsch.

Aufgabe 5

Wir nehmen an, dass $W \not\subseteq V_1$ und $W \not\subseteq V_2$.

Zu zeigen: $W \not\subseteq V_1 \cup V_2$.

Beweis:

Da $W \not\subseteq V_1$ und $W \not\subseteq V_2$, gibt es $v_1 \in W$ mit $v_1 \notin V_1$ und $v_2 \in W$ mit $v_2 \notin V_2$.

1. Fall: $v_1 \notin V_2$. Dann ist $v_1 \in W$, aber $v_1 \notin V_1 \cup V_2$ und somit gilt $W \not\subseteq V_1 \cup V_2$.

2. Fall: $v_2 \notin V_1$. Dann ist $v_2 \in W$, aber $v_2 \notin V_1 \cup V_2$ und somit gilt $W \not\subseteq V_1 \cup V_2$.

3. Fall: $v_1 \in V_2$ und $v_2 \in V_1$. Dann ist

$v_1 + v_2 \in W$, da $v_1 \in W$ und $v_2 \in W$ und W ein UVR von V ist.

Aber es gilt

$v_1 + v_2 \notin V_1$, denn falls $v_1 + v_2 \in V_1$, dann ist auch $v_1 = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V_1} - \underbrace{v_2}_{\in V_1} \in V_1$,

Widerspruch!

Genau analog folgt $v_1 + v_2 \notin V_2$.

Somit ist $v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2$ und somit $W \not\subseteq V_1 \cup V_2$.

$\square$

Aufgabe 6

Aus der Vorlesung ist bekannt:

Satz: Die Menge $Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$ ist bezüglich der üblichen skalaren Multiplikation und Addition ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Insbesondere folgt aus dem Satz, dass $Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$ eine abelsche Gruppe bzgl. $+$ ist. Um zu zeigen, dass $(Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2), +, *)$ ein komm. Ring ist, bleibt also zu zeigen:

- $*$ ist assoziativ: Seien $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$.
  Dann gilt:
  $$((a_{ij}) * (b_{ij})) * (c_{ij}) = (a_{ij} b_{ij}) * c_{ij} = ((a_{ij} b_{ij}) c_{ij})_{i,j} \underset{\text{Mult. auf } \mathbb{R} \text{ ass.}}{=} (a_{ij}(b_{ij} c_{ij})) = a_{ij} * (b_{ij} c_{ij}) = a_{ij} * ((b_{ij}) * (c_{ij})).$$
- $*$ ist kommutativ: Seien $(a_{ij}), (b_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$.
  Dann ist $$(a_{ij}) * (b_{ij}) = (a_{ij} b_{ij}) \underset{\mathbb{R} \text{ komm.}}{=} (b_{ij} a_{ij}) = (b_{ij}) * (a_{ij})$$
- Distributivgesetz: Seien $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij})$ wie oben.
  $$(a_{ij}) * ((b_{ij}) + (c_{ij})) = a_{ij} * (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij}(b_{ij} + c_{ij}))$$
  $$\underset{\text{Distr. in } \mathbb{R}}{=} (a_{ij} b_{ij} + a_{ij} c_{ij}) = (a_{ij} b_{ij}) + (a_{ij} c_{ij})$$
  $$= (a_{ij}) * (b_{ij}) + (a_{ij}) * (c_{ij}).$$
- Einselement: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist Einsel. bzgl. $*$, da für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$ gilt:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a & 1\cdot b \\ 1\cdot c & 1\cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)$ ist kein Körper, denn es gilt z.B.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ aber } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{Mat_{\mathbb{R}}(2\times 2)} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$